

因式分解运算能力倍优

一、因式分解知识点

1、把一个多项式化为几个整式的积的形式，这种变形叫做把这个多项式因式分解，也叫作分解因式。分解因式要进行到每一个因式都不能再分解为止。分解因式的常用方法有：

(1)提公因式法 如多项式 $am + bm + cm = m(a + b + c)$,

其中 m 叫做这个多项式各项的公因式， m 既可以是一个单项式，也可以是一个多项式。

(2)运用公式法

如果把乘法公式反过来，就可以把某些多项式分解因式，这种方法叫公式法。

平方差公式： $a^2 - b^2 = (a + b)(a - b)$;

完全平方公式： $a^2 \pm 2ab + b^2 = (a \pm b)^2$

$$(a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2ab + 2ac + 2bc$$

立方和公式： $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$;

立方差公式： $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$;

完全立方公式： $a^3 \pm 3a^2b + 3ab^2 \pm b^3 = (a \pm b)^3$.

公式： $a^3 + b^3 + c^3 - 3abc = (a + b + c)(a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ca)$

(3)十字相乘法

对于二次项系数为 1 的二次三项式 $x^2 + px + q$ ，寻找满足 $ab = q$ ， $a + b = p$ 的 a ， b ，如有，则 $x^2 + px + q = (x + a)(x + b)$ ；对于一般的二次三项式 $ax^2 + bx + c (a \neq 0)$ ，寻找满足 $a_1a_2 = a$ ， $c_1c_2 = c$ ， $a_1c_2 + a_2c_1 = b$ 的 a_1 ， a_2 ， c_1 ， c_2 ，如有，则 $ax^2 + bx + c = (a_1x + c_1)(a_2x + c_2)$.

(4)分组分解法：把各项适当分组，先使分解因式能分组进行，再使分解因式在各组之间进行。分组分解法主要应用于四项以上的多项式的因式分解。分组方法的不同，仅仅是因为分解的手段不同，各种手段的目的都是把原多项式进行因式分解。

对于**四项式**一般采用两项、两项分组法或者三项，一项分组，其中三项的一组中应使其成为完全平方公式，而剩下的一项必须能写成代数式的平方，

且又与完全平方公式符号相反，则得到 $(a \pm b)^2 - c^2$ 的形式，再用平方差公式分解。五项式一般采用三项、两项分组；六项式采用三、三分组，或三、二、一分组，或二、二、二分组。

热身题：（5分钟）

1. 填空：(1) $(\quad)^2 = x^6$ ； (2) $(-\quad)^2 = 9x^4$ ；

(3) $(\quad)^2 = \frac{16}{9}x^2y^4$ ； (4) $(\quad)^3 = -\frac{1}{8}x^6y^3$ ；

2. 填空：

(1) $-2x(\quad) = -4x^3 + 6x^2 - 8x$ ；
 (2) $x^2(\quad) = x^4 - 3x^3 - 2x^2$ ； (3) $x^{n+1}(\quad) = x^{2n} + 2x^{n+1}$ 。

3. 填空：

(1) $(x+2)(\quad) = x^2 - x - 6$ ； (2) $(\quad - 1)(x + \quad) = x^2 + x - 2$ ；
 (3) $(2x+3)(\quad) = 6x^2 + 5x - 6$ ； (4) $(\quad + 5)(2x - \quad) = 4x^2 - 25$ ；
 (5) $(\quad)^2 = x^2 + 6x + 9$ ； (6) $(x + \quad)^2 = (\quad) + 8x + (\quad)$ ；
 (7) $(x+3)(\quad) = x^2 + 27$ 。

二、经典例题

例 1、分解因式：

(1) $2x^2 + 2xy - 3x - 3y$ (2) $a^2 - b^2 + 4a - 4b$

(3) $4x^2 - 9y^2 - 24yz - 16z^2$ (4) $x^3 - x^2 - x + 1$

例 2、分解因式：

(1) $m^2 + n^2 - 2mn + n - m$ (2) $x^2 - y^2 - z^2 - 2yz + 1 - 2x$

$$(3)x^2-6xy+9y^2-10x+30y+25$$

$$(4)a^2-a^2b+ab^2-a+b-b^2$$

例 3、分解因式：

$$(1) 3x^3+6x^2y-3x^2z-6xyz$$

$$(2) ab(c^2+d^2)+cd(a^2+b^2)$$

$$(3) (ax+by)^2+(bx-ay)^2$$

$$(4) a^2-4ab+3b^2+2bc-c^2$$

例 4、用十字相乘法因式分解：

$$(1) 2x^2-5x-12;$$

$$(2) 3x^2-5x-2;$$

$$(3) 6x^2-13x+5;$$

$$(4) 7x^2-19x-6;$$

$$(5) 12x^2-13x+3;$$

$$(6) 4x^2+24x+27。$$

例 5、用十字相乘法分解因式：

$$(1) 2x^2+3x+1;$$

$$(2) 2y^2+y-6;$$

$$(3) 6x^2-13x+6;$$

$$(4) 3a^2-7a-6;$$

$$(5) 6x^2-11xy+3y^2;$$

$$(6) 4m^2+8mn+3n^2;$$

$$(7) 10x^2-21xy+2y^2;$$

$$(8) 8m^2-22mn+15n^2。$$

练习：1、 $a^2+7b-ab-7a$ 2、 $x^4y+2x^3y^2-x^2y-2xy^2$

3、 $x^2-2xy+y^2-z^2$ 4、 $m^2+2m-4n^2+1$

5、 $2a^3-a^2-2a+1$ 6、 x^3-x^2-x+1

7、 $a^2+2ab+b^2+2ac+2bc+c^2$ 8、 $x^2+y^2-x+y-6-2xy$

家庭作业：

一、分解下列因式：

(1). $10a(x-y)^2-5b(y-x)$

(2). $a^{n+1}-4a^n+4a^{n-1}$

(3). $x^3(2x-y)-2x+y$

(4). $x(6x-1)-1$

(5). $2ax-10ay+5by+6x$

(6). $1-a^2-ab-\frac{1}{4}b^2$

* (7). a^4+4

(8). $(x^2+x)(x^2+x-3)+2$

(9). x^5y-9xy^5

(10). $-4x^2+3xy+2y^2$

(11). $4a - a^5$

(12). $2x^2 - 4x + 1$

(13). $4y^2 + 4y - 5$

(14) $3X^2 - 7X + 2$

二、分解下列因式:

1、 $x^2 + 3x + 2$ 2、 $x^2 + 5x + 6$ 3、 $x^2 - 3x + 2$ 4、 $x^2 - 7x + 12$

5、 $y^2 + 4y - 5$ 6、 $p^2 - 2p - 15$ 7、 $x^2 + 3x - 4$ 8、 $a^2 - 11a + 28$

6、

9、 $x^2 + 10x + 16$ 10、 $x^2 - 3x - 40$ 11、 $a^2 - a - \frac{3}{4}$ 12、 $m^2 + 8m - 20$

13、 $y^2 - 13y + 42$ 14、 $x^2 + x - 90$ 15、 $x^2 - 9x + 20$ 16、 $y^2 - 2y - 35$

17、 $(x + 2y)^2 + 4(x + 2y) + 3$ 18、 $2x^3 - 6x^2 - 8x$ 19、 $x^4 - 13x^2 + 36$

20、 $(x^2 - 4x)^2 + 6(x^2 - 4x) + 9$ 21、 $(x^2 + 2x)^2 - 2(x^2 + 2x) - 3$

7、若代数式 $x^2 + kxy + 9y^2$ 是完全平方式，则 k 的值是 9、计算： $3^{2008} - 3^{2007}$

10、先分解因式，再计算求值： $xz - yz$ ，其中 $x=17.8, y=28.8, z=\frac{7}{11}$

11 已知 $ab=7, a+b=-1$ ：求多项式 $a^2b + ab^2$ 的值

3. 若 $A = 3x + 5y$, $B = y - 3x$, 则 $A^2 - 2A \cdot B + B^2 =$ _____

4. 若 $x^2 - 6x + t$ 是完全平方式，则 $t =$ _____

5. 因式分解： $9a^2 - 4b^2 + 4bc - c^2 =$ _____

6. 分解因式： $a^3c - 4a^2bc + 4ab^2c =$ _____

7. 若 $|x-2|+x^2-xy+\frac{1}{4}y^2=0$, 则 $x=$ _____, $y=$ _____

8. 若 $a=99$, $b=98$, 则 $a^2-2ab+b^2-5a+5b=$ _____

9. 计算 $12.798 \times 0.125 - 0.125 \times 4.798 =$ _____

12. 若 a 、 b 、 c , 这三个数中有两个数相等, 则 $a^2(b-c)+b^2(c-a)+c^2(a-b)=$ _____

13. 若 $a+b=5$, $ab=-14$, 则 $a^3+a^2b+ab^2+b^3=$ _____

二. 选择题 (每小题 3 分, 共 27 分)

18. $(-a)^m + a(-a)^{m-1}$ 的值是 ()

A. 1

B. -1

C. 0

D. $(-1)^{m+1}$

19. 把 $3a^{n+2} + 15a^{n+1} - 45a^n$ 分解因式是 ()

20. 若 n 为任意整数, $(n+11)^2 - n^2$ 的值总可以被 k 整除, 则 k 等于 ()

A. 11

B. 22

C. 11 或 22

D. 11 的倍数

21. 下列等式中一定正确的是 ()

A. $(a+b)^n = (b+a)^n$

B. $(a-b)^n = (b-a)^n$

C. $(b-a)^n = -(a-b)^n$

D. $(-a-b)^n = (a+b)^n$

22. 多项式 $-8m^2n^3 + 10m^3n^2 + 2m^2n^2$ 被 $-2m^2n^2$ 除, 所得的商为 ()

A. $4n+5m-1$

B. $4n-5m+1$

C. $4n-5m-1$

D. $4n+5m$

三. 解答题 (共 61 分)

23. 把下列各式分解因式 (每小题 4 分共 20 分)

(1) $m^2(m-n)^2 - 4(n-m)^2$

(2) $x^2 - 4 - 4xy + 4y^2$

(3) $(3x^2 - 4x + 3)^2 - (2x^2 - x - 7)^2$

(4) $-x^3 + x^2 - \frac{1}{4}x$

(5) $x(x+1)^3 + x(x+1)^2 + x(x+1) + x + 1$

24. 计算 (每小题 5 分, 共 10 分)

(1) $\frac{2^{99} - 2^{98}}{2^{101} - 2^{100}}$

(2) $\frac{2004^3 - 2 \times 2004^2 - 2002}{2004^3 + 2004^2 - 2005}$

25. 已知 $m + n = 3$, $mn = \frac{2}{3}$, 求 $m^3n - m^2n^2 + mn^3$ 的值。(10 分)

26. 选择适当的方法分解下列多项式 (每小题 5 分共 10 分)

(1) $x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 6xy + 4xz - 12yz$

(2) $(a^2 + 5a + 4)(a^2 + 5a + 6) - 120$

11. 分解因式:

(1) (2006 年成都市) $a^3 + ab^2 - 2a^2b$;

(2) (2006 年怀化市) 已知 $a = 2006x + 2007$, $b = 2006x + 2006$, $c = 2006x + 2005$.
求 $2a^2 + 2b^2 + 2c^2 - 2ab - 2bc - 2ac$ 的值.

例 3 已知 $x - 3$ 是 $kx^4 + 10x - 192$ 的一个因式, 求 k 的值.

5. 利用因式分解计算: $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{9^2}\right)\left(1 - \frac{1}{10^2}\right) \cdots \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)$.

8. 已知多项式 $2x^2 + bx + c$ 分解因式为 $2(x - 3)(x + 1)$, 则 b, c 的值为 ()

A、 $b = 3, c = -1$ B、 $b = -6, c = 2$ C、 $b = -6, c = -4$ D、

$b = -4, c = -6$

9. a, b, c 是 $\triangle ABC$ 的三边, 且 $a^2 + b^2 + c^2 = ab + ac + bc$, 那么 $\triangle ABC$ 的形状是 (

A、直角三角形 B、等腰三角形 C、等腰直角三角形 D、等边三角形

10、在边长为 a 的正方形中挖掉一个边长为 b 的小正方形 ($a > b$)。把余下的部分剪拼成一个矩形 (如图)。通过计算图形 (阴影部分) 的面积, 验证了一个等式, 则这个等式是 ()

A、 $a^2 - b^2 = (a+b)(a-b)$

B、 $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$

C、 $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$

D、 $a^2 - ab = a(a-b)$

二、填空题: (每小题 3 分, 共 30 分)

12. 利用分解因式计算: $3^{2003} + 6 \times 3^{2002} - 3^{2004} =$ _____.

15. 已知 $a^2 - 6a + 9$ 与 $|b - 1|$ 互为相反数, 计算 $a^3b^3 + 2a^2b^2 + ab$ 的结果是_____.

16.

17. 若 $x^2 + px + q = (x + 2)(x - 4)$, 则 $p =$ _____, $q =$ _____.

18. 已知 $a + \frac{1}{a} = 3$, 则 $a^2 + \frac{1}{a^2}$ 的值是_____.

19. 若 $x^2 + mx + n$ 是一个完全平方式, 则 m 、 n 的关系是_____.

20. 已知正方形的面积是 $9x^2 + 6xy + y^2$ ($x > 0, y > 0$), 利用分解因式, 写出表示该正方形的边长的代数式_____.

三、解答题: (共 70 分)

21: 分解因式 (12 分)

(1) $(x^2 + 2x)^2 + 2(x^2 + 2x) + 1$

(2) $(xy + 1)(x + 1)(y + 1) + xy$

(3) $2x^2 + 2x + \frac{1}{2}$

() () () () () () () () () ()

$(a - b)(3a + b)^2 + (a + 3b)^2(b - a)$

22. 已知 $x^2 - 2(m - 3)x + 25$ 是完全平方式, 你能确定 m 的值吗? 不妨试一试. (6 分)

23. 先分解因式, 再求值: (8 分)

(1) $25x(0.4 - y)^2 - 10y(y - 0.4)^2$, 其中 $x = 0.04, y = 2.4$.

(2) 已知 $a + b = 2, ab = 2$, 求 $\frac{1}{2}a^3b + a^2b^2 + \frac{1}{2}ab^3$ 的值.

24. 利用简便方法计算 (6 分)

(1) $202^2 + 198^2$

(2) $2005 \times 20042004 - 2004 \times 20052005$

25. 若二次多项式 $x^2 + 2kx - 3k^2$ 能被 $x-1$ 整除, 试求 k 的值。(6分)

26. 不解方程组 $\begin{cases} 2x + y = 6 \\ x - 3y = 1 \end{cases}$, 求 $7y(x-3y)^2 - 2(3y-x)^3$ 的值。(10分)

27. 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长, 且满足 $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a+c) = 0$, 试判断此三角形的形状。(10分)

28. 读下列因式分解的过程, 再回答所提出的问题:(12分)

$$\begin{aligned} 1+x+x(x+1)+x(x+1)^2 &= (1+x)[1+x+x(x+1)] \\ &= (1+x)^2(1+x) \\ &= (1+x)^3 \end{aligned}$$

(1) 上述分解因式的方法是_____，共应用了_____次。

(2) 若分解 $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\dots+x(x+1)^{2004}$, 则需应用上述方法_____次, 结果是_____。

(3) 分解因式: $1+x+x(x+1)+x(x+1)^2+\dots+x(x+1)^n$ (n 为正整数)。

8、 $2x^3 - x^2 - 5x + k$ 中, 有一个因式为 $(x-2)$, 则 k 值为 ()

9、已知 $x^2 + y^2 + 2x - 6y + 10 = 0$, 则 $x + y =$ ()

A、2 B、-2 C、4 D、-4

10、若三角形的三边长分别为 a 、 b 、 c , 满足 $a^2b - a^2c + b^2c - b^3 = 0$, 则这个三角形是 ()

A、等腰三角形 B、直角三角形 C、等边三角形 D、三角形的形状不确定

2、
$$\frac{2001^3 - 2 \times 2001^2 - 1999}{2001^3 + 2001^2 - 2002}$$

利用因式分解说明: $36^7 - 6^{12}$ 能被 140 整除。

七、附加题:(每小题 5 分, 共 20 分)

1、分解因式： $x^{m+3} - 2x^{m+2}y + x^{m+1}y^2$

2、若 $a + b = 3, ab = -2$, 求 $a^3 + a^2b + ab^2 + b^3$ 值。

3、若 $a = 2003, b = 2004, c = 2005$, 求 $a^2 + b^2 + c^2 - ab - bc - ac$ 的值。

4、若 $a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = 0$, 求证： a, b, c 三个数中至少有两个数相等。

9、两个连续的奇数的平方差总可以被 k 整除，则 k 等于（

12、如果关 x 的不等式 $(m+1)x > m+1$ 的解集为 $x < 1$, 则 m 的取值范围是（ ）

$$9 \times 9 + 19 = 9^2 + 2 \times 9 + 1 = (9+1)^2 = 10^2$$

$$99 \times 99 + 199 = 99^2 + 2 \times 99 + 1 = (99+1)^2 = 100^2 = 10^4$$

1. 计算：

$999 \times 999 + 1999 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$; (本小题 2 分)

$9999 \times 9999 + 19999 = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}} = \underline{\hspace{2cm}}$ 。(本小题 2 分)

2. 猜想 $9999999999 \times 9999999999 + 19999999999$ 等于多少? 并写出计算过程。(本小题 3 分)

21、阅读：对于二次三项式 $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)，当 $b^2 - 4ac \geq 0$ 时， $ax^2 + bx + c$ 在实数范围内可以分解因式。

例：对于 $2x^2 - 5x + 1$ ，因为： $(-5)^2 - 4 \times 2 \times 1 > 0$ ，所以： $2x^2 - 5x + 1$ 在实数范围内可以分解因式。

问题：当 m 取什么值的时候， $2x^2 - 6x + (1 - m)$ 在实数范围内可以分解因式。

23、计算下列各式：

(1) $1 - \frac{1}{2^2} = \underline{\hspace{2cm}}$;

(2) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$;

(3) $\left(1 - \frac{1}{2^2}\right)\left(1 - \frac{1}{3^2}\right)\left(1 - \frac{1}{4^2}\right) = \underline{\hspace{2cm}}$;

你能根据所学知识找到计算上面的算式的简便方法吗? 请你利用你找到的简便

方法计算下式:

$$\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$$

20. 若 n 为任意整数, $(n+11)^2 - n^2$ 的值总可以被 k 整除, 则 k 等于 ()

- A. 11 B. 22 C. 11 或 22 D. 11 的倍数

1) $\frac{2^{99} - 2^{98}}{2^{101} - 2^{100}}$

(2) $\frac{2004^3 - 2 \times 2004^2 - 2002}{2004^3 + 2004^2 - 2005}$

利用分解因式证明: $25^7 - 5^{12}$ 能被 120 整除。

解:

23、已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长, 且满足 $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a+c) = 0$,

试判断此三角形的形状。(本题 6 分)

解:

例 3 已知 $x-3$ 是 $kx^4+10x-192$ 的一个因式,求 k 的值.

5.利用因式分解计算: $\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{3^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{9^2}\right)\left(1-\frac{1}{10^2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{n^2}\right)$.

计算: $3^{2008} - 3^{2007}$

12. 利用分解因式计算: $3^{2003} + 6 \times 3^{2002} - 3^{2004} =$ _____

17. 若 $x^2 + px + q = (x+2)(x-4)$, 则 $p=$ _____, $q=$ _____。

22. 已知 $x^2 - 2(m-3)x + 25$ 是完全平方式,你能确定 m 的值吗?不妨试一试。(6分)

24. 利用简便方法计算 (6分)

(2) $202^2 + 198^2$

(2) $2005 \times 20042004 - 2004 \times 20052005$

25. 若二次多项式 $x^2 + 2kx - 3k^2$ 能被 $x-1$ 整除, 试求 k 的值。(6分)

27. 已知 a 、 b 、 c 是 $\triangle ABC$ 的三边的长, 且满足 $a^2 + 2b^2 + c^2 - 2b(a+c) = 0$, 试

判断此三角形的形状。(10分)

4、求证：无论 x 、 y 为何值， $4x^2 - 12x + 9y^2 + 30y + 35$ 的值恒为正。(4分)

2. 若使代数式 $\frac{3m-1}{2}$ 的值在-1 和 2 之间， m 可以取的整数有 ()