# 数学解题中的通性通法

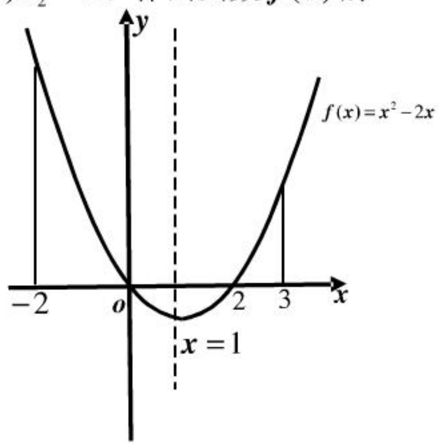
中学数学的学习离不开数学解题，在数学解题中，经常会遇到一些常规的解题模式和常用的数学方法，我们称之为通性通法。通性通法对数学学习与数学解题非常重要，在数学解题中，我们要整体把握好通性通法，理解通性通法的本质。下面让我们通过几个问题，共同探讨一下数学解题中的通性通法。

**1. 二次函数闭区间上求最值**

**求函数 $f(x)=x^2-2x$ 在区间 $[-2,3]$ 上的最大值和最小值.**

解题思路：作出函数 $f(x)=x^2-2x$ 的图象，在区间 $[-2,3]$ 上截段，数形结合，寻求函数的最大值和最小值

解题过程：由 $f(x)=x^2-2x=0$ 解得零点：$x_1=0, x_2=2$，作出函数 $f(x)$ 的图象（如图）




由图象可以看出：当 $x=-2$ 时，函数 $f(x)$ 取

最大值 $f(-2)=4+4=8$；当 $x=1$ 时，函数

$f(x)$ 取最小值 $f(1)=1-2=-1$.

**规律总结：二次函数闭区间上求最值时，**基本的通法是：作图象，截段，求最值等。

**2. 直线与圆锥曲线位置关系**

**已知双曲线 $C$：$2x^2-y^2=2$ 与点 $P(1, 2)$，求过 $P(1, 2)$ 点的直线 $l$ 的斜率取值范围，使 $l$ 与 $C$ 分别有一个交点，两个交点，没有交点.**

解：(1) 当直线 $l$ 的斜率不存在时，直线 $l$ 的方程为 $x=1$，与曲线 $C$ 有一个交点.

(2) 当直线 $l$ 的斜率存在时，设直线 $l$ 的方程为 $y-2=k(x-1)$，代入曲线 $C$ 的方程，并整理得：$(2-k^2)x^2+2(k^2-2k)x-k^2+4k-6=0$ (*)

（i）当 $2-k^2=0$，即 $k=\pm\sqrt{2}$ 时，方程(*)有一个根，直线 $l$ 与曲线 $C$ 有一个交点

（ii）当 $2-k^2\neq 0$，即 $k\neq\pm\sqrt{2}$ 时

$\Delta=[2(k^2-2k)]^2-4(2-k^2)(-k^2+4k-6)=16(3-2k)$

①当 $\Delta=0$，即 $k=\dfrac{3}{2}$ 时，方程(*)有一个实根，直线 $l$ 与曲线 $C$ 有一个交点.

②当 $\Delta>0$，即 $k<\dfrac{3}{2}$，又 $k\neq\pm\sqrt{2}$，故当 $k<-\sqrt{2}$ 或 $-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$ 或 $\sqrt{2}<k$

$<\dfrac{3}{2}$时，方程(*)有两不等实根，直线$\boldsymbol{l}$与曲线$C$有两个交点.

③当$\Delta<0$，即$k>\dfrac{3}{2}$时，方程(*)无解，直线$\boldsymbol{l}$与曲线$C$没有交点.

综上可知：当$k=\pm\sqrt{2}$，或$k=\dfrac{3}{2}$，或$k$不存在时，直线$\boldsymbol{l}$与曲线$C$只有一个交点；当$\sqrt{2}<k<\dfrac{3}{2}$，或$-\sqrt{2}<k<\sqrt{2}$，或$k<-\sqrt{2}$时，直线$\boldsymbol{l}$与曲线$C$有两个交点；当$k>\dfrac{3}{2}$时，直线$\boldsymbol{l}$与曲线$C$没有交点.

**规律总结：**判定直线与圆锥曲线位置关系时，首先讨论直线有无斜率。当直线$\boldsymbol{l}$斜率存在时，应将直线$l$方程与圆锥曲线C的方程联立，消去$y$（也可消去$x$）得一个关于变量$x$的一元方程$ax^2+bx+2=0$.

①当$a\neq 0$时，若有$\Delta>0$，则$l$与C相交；若$\Delta=0$，则$l$与C相切；若$\Delta<0$，则$l$与C相离. 通过$\Delta$的情况判断直线与圆锥曲线的位置关系。

②当$a=0$时，得到一个一元一次方程，若方程有解，则有直线$l$与C相交，此时只有一个公共点；若C为双曲线，则$l$平行于双曲线的渐近线；若C为抛物线，则$l$平行于抛物线的轴. 所以只有当直线与双曲线、抛物线只有一个公共点时，直线与双曲线、抛物线可能相切，也可能相交。

### 3. 待定系数法求解数学问题

待定系数法，就是把具有某种确定形式的数学问题，通过引入一些待定的系数，转化为方程组来解决的数学方法。解题的关键是依据已知条件，正确列出等式或方程。

**例1** 已知抛物线过A(0，1),B(1，2),C(2，-1)三点，求函数解析式.

解：设函数解析式为$y=ax^2+bx+c$，∵抛物线过（0，1），（1，2），（2，-1）

$$\therefore\begin{cases}c=1\\a+b+c=2\\4a+2b+c=-1\end{cases}$$，解之得$a=-2$，$b=3$，$c=1$；

故函数解析式为$y=-2x^2+3x+1$.

**例2** 求过三点O(0，0)、A(1，1)、B(4，2)的圆的方程.

解：设所求圆的方程为$x^2+y^2+Dx+Ey+F=0$，由O、A、B在圆上，则有

$$\begin{cases} F=0 \\ D+E+F+2=0 \\ 4D+2E+F+20=0 \end{cases}$$ 解得：D=-8，E=6，F=0，

故所求圆的方程为 $x^2+y^2-8x+6y=0$.

**例题评析：**以上两个例题均采用了待定系数法。判断一个问题是否用待定系数法求解，主要是看所求解的数学问题是否具有某种确定的数学表达式，两个问题都具有确定的数学表达形式，所以都可以用待定系数法求解。待定系数法解题的基本步骤是：第一步，确定所求问题含有待定系数的解析式；第二步，根据恒等的条件，列出一组含待定系数的方程；第三步，解方程组或者消去待定系数，从而使问题得到解决。

通过以上几个例子，我们可以看到通性通法在数学解题中的重要作用。这种具有普遍意义的解题方法，在解决问题中是最适用的，是数学方法的主流，也是高考中的重要考查点。因此，我们在教学中重视对通性通法的重视和引导，把通性通法放在一个重要的地位。当然，数学中的通性通法不仅仅是以上几种，如数形结合、变量代换、消元、某类问题的解法等，都是重要的通性通法。在教学中需要我们将其渗透于各章节之中，加强对通性通法的训练与提高。