“不等式与不等式组”说课

章巍：北京十一学校 中学高级

一、数学分析

有大小的数量，彼此之间既存在着相等关系，也存在着不等关系。。从某种意义上讲，不等关系是现实世界中更为普遍的数量关系，相等往往是相对的，而不等却常常是绝对的。“相等”与“不等”这两种基本的数量关系相辅相成，形成对数量关系的完整描述。相等关系我们用等式（方程）来刻画，而刻画不等关系的数学工具就是不等式。

一般地，我们把“≠”、“＞”、“＜”、“≥”、“≤”等数学符号统称不等号。用不等号连接表示不等关系的式子叫做**不等式**。

在数学上，我们可以这样来定义“大于”关系：

在一个数集 M 中，规定一个关系，记作“＞”。若“＞”同时满足：

（1）对于 $a\in M$，$b\in M$，有且仅有 $a>b$，$b>a$，$a=b$ 之一成立（三歧性）；

（2）对于 $a\in M$，$b\in M$，$c\in M$，若 $a>b$，$b>c$，则 $a>c$（传递性）；

（3）对于 $a\in M$，$b\in M$，$c\in M$，若 $a>b$，则 $a+c>b+c$（加法单调性）；

（4）对于 $a\in M$，$b\in M$，$c\in M$，若 $a>b$，$c>0$，则 $ac>bc$（乘法单调性 1）。

则我们称关系“＞”为“大于”。

同样的，我们可以定义“小于”（“＜”）关系。

需要注意的是，“≥”的含义是“大于或等于”，即 $a\geq b$ 表示 $a>b$ 或 $a=b$。同样，“≤”的含义是“小于或等于”。因此，一般地，用“＞”、“＜”连接的不等式称为严格不等式，用“≥”、“≤”连接的不等式称为非严格不等式，或称广义不等式。

我们说实数间存在着大小关系，是指两个实数能够同时满足上述四个条件；而两个复数却不能同时满足上述四个条件（或者说满足这些条件后就会产生矛盾），所以复数是不能比较大小的。换句话说，实数域是有序域，而复数域不是有序域，所以对于不等式的讨论，只有在实数范围内才有意义。

由不等式的定义出发，我们还可以证明不等式的一些性质：

（1）若 $a>b$，则 $b<a$；若 $b<a$，则 $a>b$（对称性）；

（2）若 $a>b$，$c<0$，则 $ac<bc$（乘法单调性 2）；

（3）若 $a>b$，$c>d$，则 $a+c>b+d$（同向可加性）；

（4）若 $a>b>0$，$c>d>0$，则 $ac>bd$（正同向可乘性）；

（5）若 $a>b>0$，则 $a^n>b^n$ 且 $\sqrt[n]{a}>\sqrt[n]{b}$（$n\in N_+$，$n>1$）（乘开方法则）；

（6）若 $a>b$ 且 $ab>0$，则 $\frac{1}{a}<\frac{1}{b}$（倒数法则）；

（7）$|a_1+a_2+\cdots+a_n|\leqslant|a_1|+|a_2|+\cdots+|a_n|$（绝对值法则）；

……

这些性质，构成了解不等式和证明不等式的基本依据。

能够使不等式成立的未知数的值叫做这个不等式的解。

如果一个不等式定义域内的所有值都是它的解，则称此不等式为绝对不等式，如 $x^2+y^2\geqslant 2xy$。对于绝对不等式，我们通常要求证明其正确性。

如果一个不等式定义域内的所有值都不是它的解，则称此不等式为矛盾不等式。如 $\sqrt{x+3}+1<0$。

如果一个不等式定义域内的某些值是它的解而某些值不是它的解，则称此不等式为条件不等式。这些解组成的集合，叫做该不等式的解集。求不等式解集的过程叫做解不等式。

解不等式的过程就是将其转化为最简单的不等式 $x>a$（$x\geqslant a$）或 $x<a$（$x\leqslant a$）的形式。其直接依据是不等式的同解原理，而不等式同解原理又是由不等式的定义和基本性质得到的。例如，不等式的加法单调性就是不等式移项法则的来源。

像方程的分类一样，根据其中所含式子的特征，不等式可有如下分类：

$$\text{不等式}\begin{cases}\text{代数不等式}\begin{cases}\text{有理不等式}\begin{cases}\text{整式不等式}\\ \text{分式不等式}\end{cases}\\ \text{无理不等式}\end{cases}\\ \text{超越不等式}\end{cases}$$

在整式不等式中，又可以根据未知数的个数及未知项的次数，依次命名。

其中一元一次不等式是其它不等式的基础，多元、高次、分式或无理不等式，最终都是转化成一元一次不等式来求解的。对于一元一次不等式的解法，一般可按“去分母—去括号—移项—合并同类项—系数化为 1”的程序执行运算。对于一元一次不等式 $ax>b$（a、$b\in R$），其解集分布如下：

<table>
<tr><th colspan="2">a、b 的取值</th><th>不等式 $ax>b$ 的解集</th></tr>
<tr><td rowspan="2">$a\neq 0$</td><td>$a>0$</td><td>$\left\{x \mid x>\frac{b}{a}\right\}$</td></tr>
<tr><td>$a<0$</td><td>$\left\{x \mid x<\frac{b}{a}\right\}$</td></tr>
<tr><td rowspan="2">$a=0$</td><td>$b\geqslant 0$</td><td>Φ</td></tr>
<tr><td>$b<0$</td><td>$\{x \mid -\infty<x<+\infty\}$</td></tr>
</table>

义务教育的学段内，我们只研究一元一次不等式的解法。

含有两个或两个以上不等式的集合，称为不等式组。能够使不等式组中每个不等式都成立的未知数的值叫做这个不等式组的解，一个不等式组所有的解组成的集合，叫做这个不等式组的解集。一个不等式组的解集，是该不等式组中每个不等式解集的交集。义务教育的学段内，我们通常只研究含有两个一元一次不等式的不等式组和它的解法。

一些重要的不等式在数学中应用十分广泛，如 $\frac{\prod_{i=1}^{n} a_i}{\sum_{i=1}^{n} a_i} \leqslant \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)^{\frac{1}{n}} \leqslant \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} a_i$（均值不等式），$\left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i\right)^2 \leqslant \left(\sum_{i=1}^{n} a_i^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} b_i^2\right)$（柯西不等式）等等。同时，不等式也是研究其它数学内容的重要工具。在表达函数的极值、数列的收敛等许多方面，不等式都发挥着重要作用。正如有些数学家所指出的，“不等式起着重要作用是高等数学的特色之一。从原则上说，极大问题的解总能导出一个不等式，这个不等式表示出所考虑的变量小于或最多等于解所给出的最大值。在许多情况下，这样的不等式具有独立的意义。”

由于不等式在几何中可以表示一个区域，如 $x^2+y^2>25$ 就可以表示以坐标原点为圆心且半径为 5 的圆的外部，所以不等式也是渗透“几何直观”的有效载体，利用不等式（组）进行线性规划来解决一定限定条件下的“最优化”问题，就是一个典型的例子。

二、标准分析

《义务教育数学课程标准（2011 年版）》对不等关系的内容与要求是：

第一学段（1~3 年级）：

- 理解符号＜，＝，＞的含义，能用符号和词语描述万以内数的大小。
- 能结合具体情境比较两个一位小数的大小，能比较两个同分母分数的大小。

第二学段（4~6 年级）：

● 能比较小数的大小和分数的大小。

第三学段（7~9 年级）：

● 能比较有理数的大小，

● 能用有理数估计一个无理数的大致范围。

● 能确定简单实际问题中函数自变量的取值范围。

● 结合具体问题，了解不等式的意义，探索不等式的基本性质。

● 能解数字系数的一元一次不等式，并能在数轴上表示出解集；会用数轴确定由两个一元一次不等式组成的不等式组的解集。

● 能根据具体问题中的数量关系，列出一元一次不等式，解决简单的问题。[1]

通过上述内容标准，我们可以看出，义务教育阶段对不等关系的研究是循序渐进的，而对不等式的研究，则主要围绕一元一次不等式和一元一次不等式组展开，其中一元一次不等式组的应用不在研究之列。

除了有形的数学知识以外，不等式的学习内容也是落实数感、符号意识、几何直观、运算能力、推理能力、模型思想和应用意识等核心概念的重要载体。例如，我们可以借助对含有字母系数的一元一次不等式的研究，提高学生的符号意识；在利用数轴表示一元一次不等式和一元一次不等式组解集的教学中，可以让学生充分感受几何直观；求解一元一次不等式和一元一次不等式组的过程，既是培养运算能力的重要素材，也是提高推理能力的重要契机；而在利用一元一次不等式解决实际问题时，又很好地锻炼了学生的模型思想和应用意识。同时，这部分内容还始终贯穿着化归、数形结合等重要的数学思想。总之，不等式（组）的学习，对培养基础知识和基本技能，感悟基本数学思想并积累数学基本活动经验，都起着至关重要的作用。

三、教材分析

基于《义务教育数学课程标准（2011 年版）》的要求，各版本教材对《一元一次不等式和一元一次不等式组》的主要教学内容基本一致，大致包括：

1. 不等式、一元一次不等式和一元一次不等式组的概念；

2. 一元一次不等式的解、一元一次不等式的解集和一元一次不等式组的解集的概念；

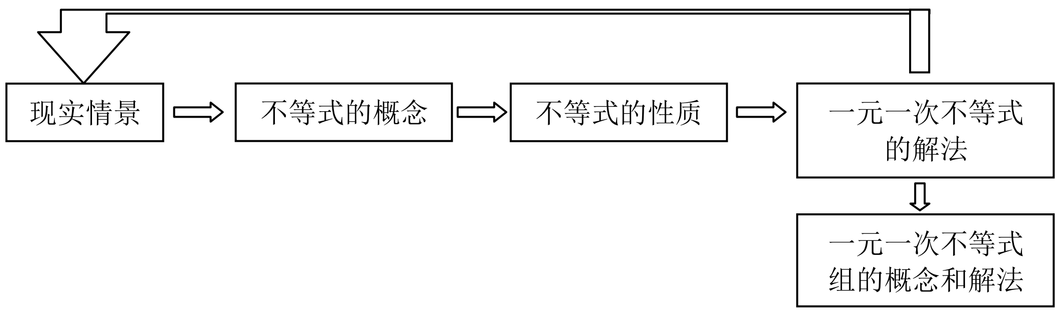
3. 不等式的基本性质；

4. 一元一次不等式的解法、一元一次不等式组的解法及其数轴表示；

5. 一元一次不等式的简单应用。

其中，一元一次不等式（组）的概念、一元一次不等式（组）的解和解集的概念，属于基础知识；不等式的基本性质是沟通不等式概念和解法的重要桥梁；一元一次不等式（组）的解法及几何表征，是这部分的重要技能，体现了算法程序化的思想；而一元一次不等式的应用，则是这部分内容的出发点与最终归宿。

从知识的展开顺序上看，几乎所有版本的教材，首先都是从一些现实问题中使学生感受到不等关系的存在，便有了表征这些不等关系的需要，从而引出不等式的概念，进一步依次得到不等式的解和解集，一元一次不等式的概念；其次，再借助丰富的实例探索不等式的基本性质，并由此展开对一元一次不等式解法的研究，通过归纳概括使之上升为程序化的算法；再次，由一元一次不等式的概念引出一元一次不等式组及其解集的概念，进而研究一元一次不等式组的解法（其实主要是确定解集的方法）；最后，再借助丰富的现实背景，研究不等式在解决最值问题、区间问题等方面的应用。整体结构可用下表反映：



四、教学分析

一元一次不等式与一元一次方程，一元一次不等式组与二元一次方程组，既有着密切的联系，又有着显著的区别。所以，在教学实践中，我们要充分类比方程和方程组来展开这部分的教学。

首先，在一元一次不等式概念的教学中，应像引入方程一样，从现实情境中表达和解决问题的需要出发，获得不等式的概念。所不同的是，要充分考虑到不等号的复杂性对学生产生的认知困难。另外，在不等式解的概念的基础上，我们还要理解不等式解集

的概念。不等式解集的概念是对解的概念的发展，其实质是集合与其元素的关系，而不等式组的解集又是组内各不等式解集的交。所以，这对学生的理解也造成了一定的困难。突破这些难点的关键，是在教学中突出与一元一次方程和二元一次方程组的对比。

其次，由于不等式的基本性质与等式的基本性质具有很强的相似性，而且解方程的最终目标（将原方程同解转化成 $x=a$ 的形式）与解不等式的最终目标（将原不等式同解转化成 $x>a$ 或 $x<a$ 等形式）也具有很强的相似性。这就决定了一元一次不等式解法的基本程序与一元一次方程是一致的，这就为类比一元一次方程的解法学习一元一次不等式的解法提供了广阔的空间。

但同时也要注意到，类比中产生的负迁移。比如，由于不等式的乘法单调性分为两种情况——不等号的方向由所乘数的符号决定（这本质上是由于不等关系有“大于”和“小于”两种），所以在不等式两边同时乘除负数时要注意改变不等号的方向，或者在不等式两边同时乘除非零数时要注意分类讨论。而这在解方程的过程中是没有遇到过的。又如，由于一元一次方程的解集通常只包括一个解，而一元一次不等式的解集往往是在定义域内限定未知数取值范围的无数个解。所以，当遇到已知方程的解求字母系数值的问题时，我们可以将解代入原方程；而遇到已知不等式的解集求字母系数值的问题时，我们却不能将不等式的解一一代入原不等式。再如，二元一次方程组的解与一元一次不等式组的解集本质上都是每个方程或不等式解集的交集，但实际操作的方法却大不一样——解方程组是通过消元来实现的，是所有方程进行“联合作战”；而解不等式组首先要分别解每一个不等式，再借助一定的方法确定交集，是“逐个击破”。

对于不等式和不等式组解集的几何表示，应使学生认识到借助数轴寻找解集的直观性，从而渗透几何直观的意识，但也应使学生清楚数轴只是确定交集的一种手段，并不是唯一的方法。

五、学生分析

在绝大多数教材中，该部分内容的学习大都安排在了七年级下册或八年级上册，一般是在学习了一元一次方程和二元一次方程组之后，所以在学习这部分内容时，学生已经具备了初步的符号意识和模型思想，也感受了化归在方程解法中的作用，初步理解了算法程序化的目的和意义，这就为该内容的学习奠定了很好的知识基础。

此外，这个年龄阶段的学生，抽象思维和逻辑思维已得到初步发展，多数学生能够

理解代数运算不是凭感觉实施的，而是需要根据前面获得的相关性质进行操作。对个案的操作只有上升为明确的、可执行的、一般化的流程，才能完成对一类数学对象的算法程序。这就为该内容的学习奠定了很好的思维基础。

六、教学设计

我校生源在北京市位于中等水平，在我校实施分层教学的前提下，以中间层次的学生为教学对象，以《一元一次不等式的解法（第 1 课时）》为例，作教学设计如下：

一元一次不等式的解法（第 1 课时）

一、教学目标：

1.从不等式的性质出发，探索并掌握一元一次不等式的解法；

2.经历类比一元一次方程解法研究一元一次不等式解法的过程，体会类比的思想；在形成一元一次不等式解法程序的过程中，感受化归思想和算法程序化的意义。

二、教学重点和难点：

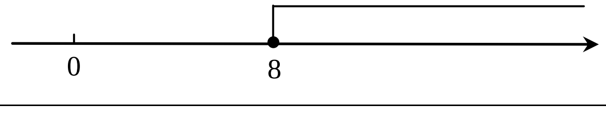
重点：解一元一次不等式的一般步骤和解集的几何表示。

难点：正确运用不等式的基本性质 3，确定变形过程中不等号的方向。

三、教学过程：

教学环节	教学内容	设计意图
情景与引入	我们来看下面的问题： 奥运知识竞赛中，一共有 25 道题，答对一题得 10 分，答错或不答一题倒扣 5 分。若小明同学的竞赛成绩超过 100 分，那么他至少应答对多少道题？ 学生通过独立阅读，分析思考，得到： 设小明至少应答对 x 道题，根据题意， 得 $10x-5(25-x)>100$。 我们可以看出，想要表达上述问题中数量之间的关系，需要用到不等式，这个问题中所列的不等式是一元一次不等式。想要知道问题的答案，我们就需要求出这个不等式的解集。	从现实问题出发，承上启下，既关注了数学与现实的联系，又秉承了本章的主线，渗透了模型思想，从而巧妙地过渡到了学生认知的“最近发展区”，自然地张开了一张同化新知的网。

类 比 与 联 想	在前面学习中，我们已经知道了什么是一元一次不等式和不等式的基本性质。我们发现一元一次不等式和一元一次方程的概念，不等式的基本性质和等式的基本性质有着很多相似之处。那么，一元一次不等式和一元一次方程在解法上有什么相同点，又有什么不同点呢？ 为了研究一元一次不等式的解法，我们先来回顾一下一元一次方程的解法。 解方程：$\frac{2+x}{2}=\frac{2x-1}{3}$，并指出每步的依据。 解：去分母，得 $3(2+x)=2(2x-1)$。 ——等式的性质 2 去括号，得 $6+3x=4x-2$。 ——去括号法则 移项，得 $3x-4x=-2-6$。 ——等式的性质 1 合并同类项，得 $-x=-8$。 ——合并同类项法则 系数化为 1，得 $x=8$。 ——等式的性质 2	教师在这里的过渡，即自然连贯，又具有很强的指向性，为学生类比一元一次方程的解法思考一元一次不等式的解法提供了重要的启发。 解这个一元一次方程，首先希望学生借此回忆起解法的一般步骤，其次是明确变形依据——等式的基本性质，这就为后面学生能够自主解决一元一次不等式的问题搭建了智力攀登的脚手架。

探 索 与 发 现	有了前面解方程的经验，我们现在自己来尝试解不等式：$\frac{2+x}{2}\leqslant\frac{2x-1}{3}$，并指出每步的依据。 在解题之前，请先思考下面的问题： （1）你认为解不等式的目标是什么？ （变形为类似 $x>a$ 或 $x<a$ 的形式） （2）你认为解不等式的依据是什么？ （不等式的基本性质） （3）不等式的基本性质是什么？它与等式的基本性质有什么不同？ （在一个不等式的两边同时乘以或除以一个负数，不等号的方向要改变） 根据上面的思考，尝试解决上面的问题： 解：去分母，得　$3(2+x)\leqslant 2(2x-1)$。 ——不等式的性质 2 去括号，得　$6+3x\leqslant 4x-2$。 ——去括号法则 移项，得　$3x-4x\leqslant -2-6$。 ——不等式的性质 1 合并同类项，得　$-x\leqslant -8$。 ——合并同类项法则 系数化为 1，得　$x\geqslant 8$。 ——不等式的性质 3 将上面不等式的解集表示在数轴上如下图：  	这几个思考问题设置在学生自主探索解法之前，目的是使学生在操作前进一步理清思路、明确目标。 这里需要大胆放手，让学生自主完成解题过程，教师不必亦步亦趋，在这个过程中可以关注每个孩子的解答过程，进行个别化的指导与纠正。待学生整体完成后，根据课堂实际情况，可作适当点评。

归纳与概括	通过解答上面的问题，我们来总结： （1）解一元一次不等式的基本步骤是什么？ （2）解一元一次不等式需要注意什么问题？ （3）在数轴上表示不等式的解集，有什么作用？ 学生分组讨论，然后发言，最后教师归纳： 解一元一次不等式的基本步骤与解一元一次方程大致相仿，一般需要经历“去分母—去括号—移项—合并同类项—系数化为 1”五步。需要注意的是，在“去分母”或“系数化为 1”的步骤中，如果不等式两边同乘（除）负数时，一定要改变不等号的方向。将不等式的解集表示在数轴上，可以清楚直观地反映出解集所代表的未知数的取值范围。	这个教学环节是本节课的重点。 从一个个具体的不等式运算中归纳出解一类不等式的通用程序，是代数思想的本质所在。 这里教师不应急于给出完善的总结，而是应该让学生畅所欲言，相互补充、完善甚至质疑。只有经历了这个过程，学生的认识才会深刻而长久。

巩固与应用	完成下面的练习： 1.解下列不等式，并把它们的解集在数轴上表示出来。 （1）$2x>3-x$； （2）$5x-12\leqslant 2(4x-3)$； （3）$1+\frac{x}{3}>5-\frac{x-2}{2}$； （4）$\frac{2x-1}{3}-\frac{5x+1}{2}\leqslant 1$。 2.求不等式 $3(x+1)\geqslant 5x-9$ 的正整数解。 3.关于 x 的一元一次不等式 $mx+2>2x+m$ 的解集是 $x<1$，求 m 的取值范围。 4.解答本节课最初提出的问题。	必要适度的练习，对学生掌握数学方法、深化数学理解具有积极的作用，同时也是学生形成算法程序化的必由之路。 三个练习，依次递进，富有层次，关注了学生思维的梯度发展。
回顾与反思	可围绕以下三个问题，让学生展开讨论： ● 这节课我们学习了什么数学方法？ ● 我们获得这个方法，经历了怎样的过程？ ● 通过这个过程，你有什么感受和体会？ 最后，教师可作简短回顾，突出类比学习的策略，模型思想，数形结合的思想，算法程序化的思想等等。 布置作业（略）。	这样的小结正是基于对教学三维目标的设计。从知识与技能、过程与方法、情感与态度三个立体的维度对本节课进行了系统的回顾。对自身思维过程的反思，是我们获得数学基本活动经验的重要途径，教学中我们应该重视这个过程。