

反比例函数的图象和性质

人教版《义务教育课程标准实验教科书·数学》

(八年级下册第十九章 26.1.2 节第二课时)

姓名： 见海荣

单位： 首都师范大学附属育新学校

数学分析

对于反比例函数图象及性质的研究与学习, 尽管还处于函数学习的初级阶段,

但它所体现的函数学习的一般规律和方法，是继一次函数学习之后的再一次强化。通过定性和定量两个角度研究反比例函数，这一探究的过程和方法，是学习初等函数的必经之路。

反比例函数图象和性质的学习，是继一次函数后，知识与方法上的一次拓展，理解与认识上的一次升华，也是思维上的一次飞跃。图象由“一条”到“两支”，形态由“直”到“曲”，由“连续”到“间断”，由与坐标轴“相交”到“渐近”，无不反映出对函数概念本质属性认识的进一步深化。

反比例函数的图象和性质，蕴含着丰富的数学思想。首先，反比例函数图象和性质，本身就是“数”与“形”的统一体。通过对图象的研究和分析，可以确定函数本身的性质，体现了数形结合的思想方法。这在学习数轴、平面直角坐标系时，学生已经接触过，结合本课内容，可以进一步加强数形结合思想方法的理解，发挥从“数”和“形”两个方面共同分析解决问题的优势。其次，从本节课知识的形成过程来看，由“解析式（确定自变量取值范围）”到“作图（列表、描点、连线）”，再到“性质（观察图象探究性质）”，充分体现了由“数”到“形”，再由“形”到“数”的转化过程，这种函数解析式及性质与函数图象之间的联系，突出体现了两者间的转化对分析解决问题的特殊作用，是转化思想的具体应用。再次，将函数中变量 x 、 y 之间的对应关系，通过图象的形状、变化趋势，借助平面直角坐标系和点的坐标，直观地予以呈现，这又充分体现了变化与对应的数学思想。

因此，学好本节课内容将为今后的函数学习奠定坚实的基础。

标准分析

《标准》中对所选内容的要求

能画出反比例函数的图象，根据图象和表达式 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 探索并理解 $k > 0$ 和 $k < 0$ 时，图象的变化情况。

在初中阶段，此内容涉及的程度：

1. 结合具体情境体会反比例函数的意义，能根据已知条件确定反比例函数的表达式。

2. 能画出反比例函数的图象，根据图象和表达式 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 探索并理解 $k > 0$ 和 $k < 0$ 时，图象的变化情况。
3. 能用反比例函数解决简单实际问题。

教材对比分析

人教版、华师大版、浙教版、北师大版以上四种版本教材的比较：

各版本教材均是采用一般问题特殊化的处理方式，首先由具体函数解析式画出函数图象，使学生经历了由数到形的转化，然后借助函数图象直观认识函数性质，实现图形语言与文字语言的转换。人教版，举了四个例子：首先由 $y = \frac{6}{x}$ 和

$y = -\frac{6}{x}$ 的图象得出反比例函数的形象及渐近性，然后由 $y = \frac{6}{x}$ 与 $y = \frac{3}{x}$ 、 $y = -\frac{6}{x}$

与 $y = -\frac{3}{x}$ 图象的共同特征归纳反比例函数的性质。北师大版举了六个例子：首

先由 $y = \frac{4}{x}$ 和 $y = -\frac{4}{x}$ 的图象得出反比例函数的形象及位置，然后由 $y = \frac{4}{x}$ 、 $y = \frac{2}{x}$

与 $y = \frac{6}{x}$ 、 $y = -\frac{4}{x}$ 、 $y = -\frac{2}{x}$ 与 $y = -\frac{6}{x}$ 图像的共同特征归纳反比例函数的增减性。

华师大版举了两个例子由 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = -\frac{6}{x}$ 的图象得出反比例函数的性质。浙教版

首先由 $y = \frac{6}{x}$ 和 $y = -\frac{5}{x}$ 的图象得出反比例函数图象的位置及对称性，然后由

$y = -\frac{8}{x}$ 、 $y = \frac{6}{x}$ 、 $y = -\frac{5}{x}$ 图像的共同特征归纳反比例函数的增减性。

教学设计

教学过程

教学目标		
<p>1.会画出反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 的图象了解其特征。根据反比例函数的图象和解析式探索并理解探索并理解 $k > 0$ 和 $k < 0$ 时，图象的变化情况及其性质。</p> <p>2.感悟“变化与对应”、“数形结合”的数学思想，发展几何直观。</p> <p>3.通过对反比例函数的定性和定量研究，使学生初步感受和理解研究函数的一般方法。</p> <p>4.在探究活动中形成严谨的科学态度和勇于探索的科学精神，学会与人合作，学会倾听、欣赏和感悟。</p>		
教材重难点		
<p>重点：会画出反比例函数的图象，理解反比例函数的性质。</p> <p>难点：准确画出反比例函数的图象，借助解析式定量分析反比例函数的性质。</p>		
学情分析		
<p>1.本节课是在已经学习了平面直角坐标系和一次函数的基础上，进一步研究反比例函数的图象和性质，学生具备研究函数的图象和性质的一般方法知道研究函数的图象和性质的一般程序，这对于学习反比例函数的图象和性质做出了良好的铺垫。</p> <p>2.同时反比例函数图象和性质的学习中，图象由“一条”到“两支”，形态由“直”到“曲”，由“连续”到“间断”，由与坐标轴“相交”到“渐近”，这些对学生而言是继一次函数后，知识与方法上的一次拓展，理解与认识上的一次升华，也是思维上的一次飞跃，因此是学生学习的难点。</p> <p>3.借助解析式定量分析反比例函数的性质是建立在学生对式的运算准确的把握，而对式的运算准确的把握学生有些薄弱，所以这也是学生学习的难点。</p>		
教学环节	师生活动	设计意图
环节一 回顾方法 确定过程	<p>问题 1 上节课我们结合具体情境体会了反比例函数的意义，并能根据已知条件确定反比例函数的表达式。今天我们来学习反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 的图象与性质。回顾我们已学过的正比例函数，我们是如何研究它的图象与性质的？这些方法怎么用来研究反比例函数？</p>	<p>教师通过问题引导学生类比已学过的一次函数的图象和性质的研究过程，明确研究反比例函数的图象及其性</p>

	<p>1. 对要研究地函数根据系数的取值范围进行分类：$y = \frac{k}{x} (k \neq 0) \begin{cases} k > 0, \\ k < 0. \end{cases}$</p> <p>2. 一般问题特殊化，通过具体函数 $y = \frac{1}{x}$ 定性（图象）、定量（解析式）两个角度研究性质。</p> <p>3. 通过改变 $y = \frac{k}{x}$ 中 k 的值，如分别取 k 为 $-1, 6, -6$，然后特殊问题一般化归纳性质。</p>	<p>质的一般方法，从而明确研究过程。</p>																		
<p>环节二 定量定性探究性质</p>	<p>从抽象到具体才有助于进行探索，不妨一般问题特殊化，具体研究反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 图象和性质。</p> <p>1. 结合反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的列表过程，猜想函数性质。</p> <p>问题</p> <p>(1) 反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 中自变量的取值范围是什么？</p> <p style="text-align: center;">$x \neq 0$</p> <p>(2) 结合反比例函数 $y = \frac{1}{x}$ 的列表过程，你能发现 y 随 x 的变化规律吗？</p> <table border="1" data-bbox="379 1758 1069 1989" style="margin-left: auto; margin-right: auto;"> <tr> <td>X</td> <td>...</td> <td>-3</td> <td>-2</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>2</td> <td>3</td> <td>...</td> </tr> <tr> <td>$y = \frac{1}{x}$</td> <td>...</td> <td>$-\frac{1}{3}$</td> <td>$-\frac{1}{2}$</td> <td>-1</td> <td>1</td> <td>$\frac{1}{2}$</td> <td>$\frac{1}{3}$</td> <td>...</td> </tr> </table>	X	...	-3	-2	-1	1	2	3	...	$y = \frac{1}{x}$...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...	<p>要获得反比例函数 $y = \frac{k}{x}$ 函数值随自变量 x 变化而变化的规律，可以采用“一般问题特殊化”的基本策略，体会研究数学问题的方法：虽然特殊无法代替一般，但是在众多特殊中却蕴含着一般的规律。</p> <p>我们通过画图象，使反比例函数解析式表示的函数关系直观化，更易于学生通过观察，得出函数图象的“特征”及函数的“性质”，但由于这样得出的结论，对“图形”的依赖性过强，甚至形成了“解析式—图象—性质”的思维定势，而忽视了数学形式化的意义，也有悖于“图形直观”在研究函数问题中的辅助性作用。我们</p>
X	...	-3	-2	-1	1	2	3	...												
$y = \frac{1}{x}$...	$-\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{2}$	-1	1	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$...												

性质:

①当 $x > 0$ 时, $y > 0$, y 随 x 的增大而减小, 并且当 $x > 0$ 无限增大时, y 的值越来越接近于 0 但永远不等于 0;

②当 $x < 0$ 时, $y < 0$, y 随 x 的增大而减小, 并且当 x 无限减小时, y 的值越来越接近于 0 但永远不等于 0;

2. 借助反比例函数 C 的图象描述性质

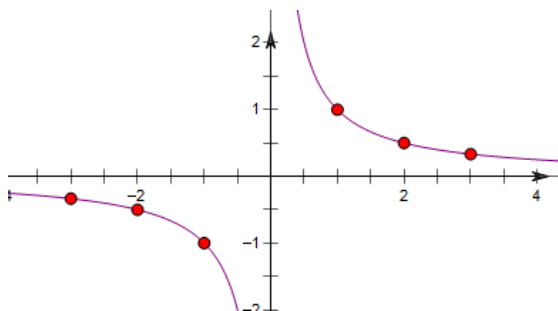
(1) 请同学描出表格中的点的位置, 观察在同一象限内, 点的位置从左至右是如何变化的, 你能从中得到变量 y 随 x 的变化规律吗?

(观察点的位置分布、自左而右的变化趋势从而描述函数的增减性)

(2) 并利用计算机展示 $y = \frac{1}{x}$ 的图象, 请同学们完

成 $y = \frac{1}{x}$ 的图象的连线过程, 借助图象描述函数的性质。

(借助计算机突破函数图象由直到曲这一难点, 由解析式和图象共同描述函数的增减性、渐进性)。



不能将对函数的认识, 完全等价于对其图形的认识, 应该把“图形”与“解析式”结合起来, 同时借助列表等手段, 更好地探究两个变量之间“变化中的规律性”。

鼓励学生多思, 多问, 综合使用函数定义, 结合列表, 对函数解析式代数结构的分析, 以及图象的理解解决更深层次的问题, 深化学生对函数概念, 图象与性质的理解。

通过类比正比例函数, 引导学生观察图象的形状、位置、变化趋势, 感受“形”的特征, 感受自变量与函数值之间变化与对应的关系, 使学生对反比例函数的图象和性质形成初步的印象。

	<p>归纳：$y = \frac{1}{x}$的图象是位于一、三象限的两条曲线（双曲线），在每一象限内图象自左至右呈下降趋势，曲线越来越接近坐标轴，因此y随x的增大而减小。</p> <p>(3) 由解析式证明性质</p> <p>①若$0 < x_1 < x_2$，则$y_1 = \frac{1}{x_1}$，$y_2 = \frac{1}{x_2}$，</p> $y_1 - y_2 = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} > 0, \therefore y_1 > y_2。$ <p>②若$x_1 < x_2 < 0$，则$y_1 = \frac{1}{x_1}$，$y_2 = \frac{1}{x_2}$，</p> $y_1 - y_2 = \frac{1}{x_1} - \frac{1}{x_2} = \frac{x_2 - x_1}{x_1 \cdot x_2} > 0 \therefore y_1 > y_2。$ <p>3. ③若$x_1 < 0 < x_2$，则$y_1 = \frac{1}{x_1} < 0$，$y_2 = \frac{1}{x_2} > 0$，</p> $\therefore y_1 < y_2。$	
<p>环节三 问题一般化 深入探究 环节四 总结归纳</p>	<p>问题 3 是不是所有的反比例函数的图象都具有这样的特征呢？</p> <p>学生分组尝试改变$y = \frac{k}{x}$中k的值，如分别取k为$-1, 6, -6$时画出反比例函数图象。</p> <p>教师演示课件，赋予不同的k值，观察所得到的不同的反比例函数图象的特征，引导学生归纳</p>	<p>使学生经历从特殊到一般的过程，加强对反比例函数图象“特征”和函数“特性”以及它们之间的相互转化关系的认识。</p> <p>通过归纳，培养</p>

	<p>“变化中的规律性”。然后，从解析式的角度，引导学生分析上述结论的合理性。</p> <p>问题 4 总结反比例函数 $y = \frac{k}{x} (k \neq 0)$ 图象的特征与性质。</p>	<p>学生抽象概括能力。</p>
<p>环节四 应用性质 解决问题</p>	<p>例 (1) 若点 $A(3, y_1)$, 点 $B(2, y_2)$ 在双曲线 $y = \frac{6}{x}$ 上, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是 _____ ;</p> <p>(2) 你能在原题的基础上进行修改, 也设计一道题目吗?</p> <p>学生可能会用到代入求值法, 利用函数增减性和利用函数示意图等方法。</p> <p>改编问题可能有如下方向: 换 A、B 点的横坐标, 同负, 异号等; 换 k 的值, 取个具体的负值 k ;</p> <p>对程度较好班级, 教师可进一步一般化为:</p> <p>若点 $A(x_1, y_1)$, 点 $B(x_2, y_2)$ 在双曲线 $y = \frac{k}{x} (k < 0)$ 上, 且 $x_1 > x_2$, 则 y_1 与 y_2 的大小关系是 _____ ;</p> <p>渗透分类讨论思想。</p>	<p>开放性的问题, 不同同学可根据自身认知水平设计不同问题。培养孩子提出问题的意识, 也渗透数学问题研究的一般方向。</p>
<p>环节五 总结反思</p>	<p>问题 5 通过本节课的学习你有哪些收获? 你还有什么疑问?</p> <p>学生在回顾反比例函数图象和性质的同时, 再次体会研究方法, 可能还有学生提出 k 对图象的影响或是提出类比一次函数 $y = kx + b$ 中 k、b 的几何意义, 反比例函数中 k 的几何意义是什么等</p>	<p>通过梳理学习收获, 使学生对反比例函数的图象与性质有个较为整体全面的认识, 养成良好的学习习惯。鼓励学生大胆提出自己的疑问,</p>

	问题。	可以深化对知识的认识。
教学设计说明		
<p>反比例函数的性质是由其代数运算决定的，但考虑到初中学生的认知水平，初中阶段采取数形结合的方法研究其性质。</p> <p>希望通过本课时的教学，使学生在以下三方面认识有一定发展：1. 深化函数概念的认识，体会变化与对应。2. 类比一次函数的研究，进一步感受研究函数的一般方法；3. 本课时设计的明线是借助图象研究反比例函数的性质，但切忌处理成操作层面的画图技能，过度依赖图象，缺乏对函数代数结构的认识。在后续学习中，当学生碰到无法画出函数图象或者高维空间问题时会束手无策。基于以上问题，本课时设计的暗线是在教学的每个环节时刻注意引导学生体会函数，图象，性质三位一体的地位，引导学生根据不同问题，从不同的角度解读，感受自变量与函数值之间变化与对应的关系。</p>		